

Ομομορφισμοί Σακτύλιων

Έστω $R = (R, +, \cdot)$ και $S = (S, +, \cdot)$ δύο Σακτύλια.

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: R \rightarrow S$ καλείται ομομορφισμός Σακτύλιων $\Leftrightarrow$

$$\forall r_1, r_2 \in R : (1) f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$$

$$(2) f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$$

Παρατήρηση: Αν οι Σακτύλιοι R και S έχουν μονάδα τότε συνήθως ένας ομομορφισμός Σακτύλιων $f: R \rightarrow S$ απαιτούμε να ικανοποιεί τη συνθήκη $f(1_R) = 1_S$, τότε θα λέμε ότι ο f είναι ομομορφισμός Σακτύλιων με μονάδα.

Παράδειγμα: (1) Κάθε ομομορφισμός Σακτύλιων $f: R \rightarrow S$ είναι ομομορφισμός $f: (R, +) \rightarrow (S, +)$ μεταξύ των (προσθετικών) αβελιανών ομάδων $(R, +)$ και $(S, +)$.

(2) Έστω $n \geq 1$, θεωράμε την απεικόνιση $\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$
 $\omega(k) = [k]_n$

Τότε η ω είναι ομομορφισμός Σακτύλιων με μονάδα

$$\left\{ \begin{aligned} \omega(k+l) &= [k+l]_n = [k]_n + [l]_n = \omega(k) + \omega(l) \\ \omega(k \cdot l) &= [k \cdot l]_n = [k]_n \cdot [l]_n = \omega(k) \cdot \omega(l) \\ \omega(1 \cdot 1) &= [1]_n = 1_n \end{aligned} \right.$$

NO:

Date:

③ Έστω R και S δύο δακτύλιοι και έστω ο δακτύλιος που γινόμενο $R \times S$

$$R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$$

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\bar{i}_R: R \rightarrow R \times S, \bar{i}_R(r) = (r, 0)$$

$$\bar{i}_S: S \rightarrow R \times S, \bar{i}_S(s) = (0, s)$$

$$\bar{w}_R: R \times S \rightarrow R, \bar{w}_R(r, s) = r, \bar{w}_S: R \times S \rightarrow S, \bar{w}_S(r, s) = s$$

Οι απεικονίσεις $\bar{i}_R, \bar{i}_S$: κανονικές εγκλειώσεις των R, S στο δακτύλιο $R \times S$

Οι απεικονίσεις $\bar{w}_R, \bar{w}_S$: προβολές του $R \times S$ στους δακτύλιους R και S

Πομπή: Οι απεικονίσεις $\bar{i}_R, \bar{i}_S, \bar{w}_R, \bar{w}_S$ είναι ομομορφισμοί δακτυλίων, διότι:

$$\bar{i}_R(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2, 0) = (r_1, 0) + (r_2, 0) = \bar{i}_R(r_1) + \bar{i}_R(r_2)$$

$$\bar{i}_R(r_1 \cdot r_2) = (r_1 \cdot r_2, 0) = (r_1, 0) \cdot (r_2, 0) = \bar{i}_R(r_1) \cdot \bar{i}_R(r_2)$$

Όμοια για την $\bar{i}_S$

NO:

Date:

$$\bullet \omega_R[(r_1, s_1) + (r_2, s_2)] = \omega_R(r_1 + r_2, s_1 + s_2) = r_1 + r_2$$

$$= \omega_R(r_1, s_1) + \omega_R(r_2, s_2)$$

$$\bullet \omega_R[(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2)] = \omega_R(r_1 r_2, s_1 s_2) = r_1 r_2 = \omega_R(r_1, s_1) \omega_R(r_2, s_2)$$

Παράδειγμα για την ω_S

Έστω ότι οι δακτύλιοι R και S έχουν μονάδα
Τότε ο δακτύλιος $R \times S$ έχει μονάδα

$1_{R \times S} = (1_R, 1_S)$, τότε οι απεικονίσεις ω_R και ω_S
ομομορφισμοί δακτυλίων με μονάδα και οι απεικονίσεις
 i_R, i_S δεν είναι ομομορφισμοί δακτυλίων με μονάδα, διότι για παράδειγμα

$$i_R(1_R) = (1_R, 0) \neq (1_R, 1_S)$$

Άσκηση: Να δείξουν οι εξής σχέσεις

$$1) i_R \circ \omega_R + i_S \circ \omega_S = I_{R \times S}$$

$$2) \omega_R \circ i_R = I_R$$

$$4) \omega_R \circ i_S = 0$$

$$3) \omega_S \circ i_S = I_S$$

$$5) \omega_S \circ i_R = 0$$

④ Για κάθε δακτύλιο R , η ταυτοτική απεικόνιση $\text{Id}_R: R \rightarrow R$, $\text{Id}_R(r) = r$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Αν R, S είναι δακτύλιοι, τότε η μηδενική απεικόνιση $0: R \rightarrow S$, $0(r) = 0$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

⑤ Η απεικόνιση $f: R \rightarrow C$, $f(r) = r = r + 0i$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων με μονάδα.

Έστω ότι $f: C \rightarrow R$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

$$\left. \begin{array}{l} f(i^2) = f(-1) = -f(1) \\ \text{"} \\ f(i \cdot i) = f(i) \cdot f(i) \end{array} \right\} \Rightarrow f(i)^2 = -f(1), \text{όπως } f(1) = f(-1) = -f(1) \cdot f(1) = -f(1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(i)^2 = -f(1) \leq 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\text{Τότε } \forall z \in C: f(z) = f(z \cdot 1) = f(z) \cdot f(1) = f(z) \cdot 0 = 0$$

Άρα, ο ομομορφισμός f είναι αναγκαστικά ο μηδενικός.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τους δακτυλίους Z και $2Z$.

Τότε η απεικόνιση $f: Z \rightarrow 2Z$, $f(k) = 2k$ είναι ομομορφισμός ομάδων αλλά όχι ομομορφισμός δακτυλίων, διότι:

$$f(k \cdot 1) = 2k \cdot 1 \neq f(k) \cdot f(1) = 2k \cdot 2 \cdot 1 = 4k$$

NO:

Date:

⑥ Έστω K : σώμα κι έστω $K[t]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων υπέρνω του K , τότε $\forall \alpha \in K$, η ανελκόνιση

$$\Phi_\alpha: K[t] \rightarrow K, \Phi_\alpha(P(t)) = P(\alpha) =$$

$= k_0 + k_1\alpha + \dots + k_n\alpha^n$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων με μονάδα

$$P(t) = k_0 + k_1t + \dots + k_nt^n$$

• Πρόταση: Έστω $f: R \rightarrow R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων

$$\textcircled{1} f(0_R) = 0_{R'} \text{ και } \forall \alpha \in R, f(-\alpha) = -f(\alpha)$$

$$\textcircled{2} \text{ Αν } r \in U(R), \text{ τότε } f(r) \in U(R') \text{ και } f(r)^{-1} = f(r^{-1})$$

{Προβέτουμε ότι: οι R, R' έχουν μονάδα και η f είναι ομομορφισμός δακτυλίων με μονάδα}

$$\textcircled{3} \underset{\text{υποσ.}}{S} \subseteq R \Rightarrow \underset{\text{υποσ.}}{f(S)} \subseteq R', \underset{\text{υποσ.}}{T} \subseteq R' \Rightarrow \underset{\text{υποσ.}}{f^{-1}(T)} \subseteq R$$

④ Αν ο R έχει μονάδα 1_R και $f(1_R) \neq 0_{R'}$, τότε ο δακτύλιος $f(R)$ έχει μονάδα το $f(1_R)$

Απόδειξη: ① Προκύπτει άμεσα διότι η f είναι ομομορφισμός δακτυλίων

NO:

Date:

$$\textcircled{2} \text{ } r \in U(R) \Rightarrow \exists s \in R: r \cdot s = 1_R = s \cdot r \Rightarrow$$

$$f(r \cdot s) = f(1_R) = f(s \cdot r) \Rightarrow f(r)f(s) = 1_{R'} = f(s)f(r)$$

$$\Rightarrow f(r) \in U(R') \text{ και } f(r)^{-1} = f(s) = f(r^{-1})$$

$\textcircled{3}$ • Έστω ότι S υποδακτύλιος του R

$$\text{Αν } x, y \in f(S) \Rightarrow x = f(r_1), y = f(r_2) \text{ όπου } r_1, r_2 \in S$$

$$\text{Τότε: } x - y = f(r_1) - f(r_2) = f(r_1 - r_2) \in f(S), \text{ διότι: } S \text{ υποδακτύλιος του } R$$

$$x \cdot y = f(r_1) \cdot f(r_2) = f(r_1 \cdot r_2) \in f(S), \text{ διότι } S \text{ υποδακτύλιος του } R$$

$$\text{Αν' το } \textcircled{1}, \text{ ενεσθι } 0_R \in S, \text{ το } f(0_R) = 0_{R'} \in f(S)$$

$$\text{Συνεπώς, } f(S) : \text{ υποδακτύλιος του } R'$$

$$\{ \text{Παρίσταν } f^{-1}(T) : \text{ υποδακτύλιος του } R', \text{ αν } T : \text{ υποδακτύλιος του } R' \}$$

$$\textcircled{4} \text{ Έστω ότι ο } R \text{ έχει μονάδα } 1_R \text{ και } f(1_R) \neq 0_{R'}$$

$$\text{Τότε: } \forall r \in R: f(r) = f(r \cdot 1_R) = f(r) \cdot f(1_R) = f(1_R \cdot r) = f(1_R) \cdot f(r)$$

$$\text{Άρα, } f(1_R) = 1_{f(R)}$$

Πρόταση: Αν ο οποιοσδήποτε δακτύλιος $f: R \rightarrow R'$ είναι ενί και ο R έχει μονάδα το 1_R και $f(1_R) \neq 0$, τότε ο R' έχει μονάδα το $f(1_R)$

NO:

Date:

Ορισμός: Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f: R \rightarrow R'$ καλείται:

- ① Μονομορφισμός (δακτυλίων) $\Leftrightarrow f: 1-1$
- ② Επιομορφισμός (δακτυλίων) $\Leftrightarrow f: \text{eni}$
- ③ Ισομορφισμός (δακτυλίων) $\Leftrightarrow f: 1-1$ και eni

Αν $f: R \rightarrow R'$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε:

• $\ker(f) = \{r \in R \mid f(r) = 0_{R'}\} \rightarrow$ πυρήνας του f

• $\text{Im}(f) = \{f(r) \in R' \mid r \in R\} \rightarrow$ εικόνα του f

Πρόταση: Έστω $f: R \rightarrow R'$ ομομορφισμός δακτυλίων

- ① $0 f: \text{μονομορφισμός} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0_R\}$
- ② $f: \text{επιομορφισμός} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = R'$
- ③ $f: \text{ισομορφισμός} \Leftrightarrow$ υπάρχει ομομορφισμός δακτυλίων

$g: R' \rightarrow R$, έτσι ώστε $f \circ g = \text{Id}_{R'}$ και $g \circ f = \text{Id}_R$

Τότε $g = f^{-1}_{\text{op}}$ και καλείται αντίστροφη της f

Έστω $f: R \rightarrow R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων

Τότε $\ker(f) = f^{-1}(\{0_{R'}\})$ κι επειδή $\{0_{R'}\} \subseteq R'$ _{υποδ.} $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(\{0_{R'}\})$ είναι υποδακτύλιος του $R \Rightarrow \ker(f) \subseteq R$ _{υποδ.}

Αντιθέτως: $\left\{ \begin{array}{l} 1) 0_R \in \ker(f) \\ 2) \forall r_1, r_2 \in \ker(f): r_1 - r_2 \in \ker(f) \\ 3) \forall r_1, r_2 \in \ker(f): r_1 \cdot r_2 \in \ker(f) \end{array} \right.$

Όπως: $\forall x \in \ker(f), \forall r \in R$, τότε: $r \cdot x, x \cdot r \in \ker(f)$

Πράγματι: $f(r \cdot x) = f(r) \cdot f(x) \xrightarrow{0_{R'}} 0_{R'} = 0_{R'} \Rightarrow r \cdot x \in \ker(f)$

$f(x \cdot r) = f(x) \cdot f(r) \xrightarrow{0_{R'}} 0_{R'} = 0_{R'} \Rightarrow x \cdot r \in \ker(f)$

- Υποομάδες $\iff$ Υποδακτύλιοι
- Κανονικές Υποομάδες $\iff$ Ιδεώδη

Ορισμός: Έστω R δακτύλιος και $I \subseteq R$

I ιδεώδες του $R \iff 1) 0_R \in I$

2) $\forall r_1, r_2 \in I \Rightarrow r_1 - r_2 \in I$

3) $\forall r \in R, \forall x \in I \Rightarrow r \cdot x, x \cdot r \in I$

NO: _____

Date: _____

Παρατηρήσεις: 1) Κάθε ιδεώδες σε ένα δακτύλιο είναι υποδακτύλιος (δεν ισχύει το αντίστροφο)

2) Ο πυρήνας ομομορφισμού δακτυλίων αποτελεί ιδεώδες

{ History time / #fun #Beligianmis #Alg.Structures }

→ Προέλευση του πρώτου ιδεώδους

$$Z[\omega] = \{a_0 + a_1\omega + \dots + a_n\omega^n \in \mathbb{C} \mid a_i \in \mathbb{Z},$$

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n}{m}\right)\}$$